Lösungen

»Aufgabentypen im TMS und EMS«

5 Lösungen »Aufgabentypen im TMS und EMS«

5.1 Dreisatz

Aufgabe 1: Frühstück **Lösung D**

Es handelt sich um einen proportionalen Dreisatz. Die zugehörige Bruchgleichung lautet:

$$\frac{3{,}56\,(€)}{4\,(\text{Brötchen})} = \frac{x\,(€)}{4+3\,(\text{Brötchen})}$$

Nach x aufgelöst ergibt sich:

$$x = \frac{3{,}56 \cdot 7}{4} = 6{,}23\,(€)$$

Der letzte Schritt zum Ergebnis in Euro ist unangenehm. Überlege Dir die für Dich beste Strategie für solche Rechnungen, indem Du mehrere Wege ausprobierst. Einige Möglichkeiten sind:

- Alles in Brüche verwandeln und berechnen
- Schriftlich multiplizieren und dividieren
- Im Kopf durch vier rechnen und dann schriftlich mal 7 rechnen
- 7/4 in eine Dezimalzahl verwandeln, damit man nur einmal schriftlich multiplizieren muss

Aufgabe 2: Glückliche Kühe **Lösung B**

Bei dieser Aufgabe kann man den Dreisatz nicht direkt anwenden, da man mehr als drei Zahlen (nämlich 5) gegeben hat, die für die Aufgabe relevant sind. Man nennt dies auch „dreispurigen Dreisatz“. Im vorliegenden Fall kann man am einfachsten zunächst bestimmen, wie viel Heu die 6 Kühe an einem halben Weidetag fressen. Da sie an einem ganzen Tag 100 kg fressen, fressen sie an einem halben Weidetag 50 kg. Jetzt kann man einen proportionalen Dreisatz anwenden:

$$\frac{6\,(\text{Kühe})}{50\,(\text{kg})} = \frac{5\,(\text{Kühe})}{x\,(\text{kg})}$$

Wenn das x wie in diesem Fall im Nenner steht, dreht man am einfachsten die Bruchgleichung auf beiden Seiten um (Vorsicht: Geht nicht bei Summen von Brüchen!). Die Einheiten kannst Du in diesen Rechnungen auch weglassen, probiere aus, ob Du dadurch an Sicherheit verlierst oder Rechnungen für Dich übersichtlicher werden, ob Du dadurch schneller oder langsamer wirst etc.:

$$\frac{50}{6} = \frac{x}{5}$$

Aufgelöst nach x ergibt sich:

$$x = \frac{5 \cdot 50}{6} = \frac{250}{6} = \frac{125}{3} = 41{,}67\text{ kg}$$

Aufgabe 3: Prüfung **Lösung B**

Wenn die Studentin **weniger** Zeit für das Buch hat, muss sie **mehr** Seiten pro Tag lesen. Es handelt sich also um einen antiproportionalen Dreisatz, die zugehörige Produktgleichung lautet:

$$12 \cdot 10 = 8 \cdot x$$

Geteilt durch 8 ergibt sich für x:

$$x = \frac{12 \cdot 10}{8} = \frac{120}{8} = 15$$

Die Studentin muss also 15 Seiten am Tag lesen.

Aufgabe 4: Baumhaus **Lösung C**

In dieser Aufgabe kann man den Dreisatz wieder nicht direkt anwenden. Solche verzögerten Dreisätze sind eine Standardaufgabe in Zulassungsprüfungen. Zunächst musst Du Dir die Zeit herausschreiben, in der alles „normal" verläuft. Hier sind das die vier Tage, die alle Kinder mitarbeiten:

$$t_1 = 4 \text{ Tage}$$

Vier Tage lang läuft alles normal. Diese muss man sich merken und am Ende addieren. Jetzt kann man einen **antiproportionalen Dreisatz** ansetzen: Danach bräuchten die 7 Kinder noch 6 Tage, jetzt sind allerdings nur noch 3 Kinder dabei. Also gilt mit antiproportionalem Dreisatz:

$$7\,(\text{Kinder}) \cdot 6\,(\text{Tage}) = 3\,(\text{Kinder}) \cdot x\,(\text{Tage})$$

$$x = \frac{7 \cdot 6}{3} = 14\,(\text{Tage})$$

Zu diesen 14 Tagen müssen noch die ersten 4 addiert werden, somit dauert der Bau 18 Tage.

5.2 Mischungsrechnen

Aufgabe 5: Cocktail **Lösung B**

Wie meistens bei Mischungsaufgaben kannst Du die Formel direkt aus dem Text herausschreiben. Du musst nur daran denken, dass Pfirsichsaft einen Alkoholanteil von 0 % besitzt:

$$30l \cdot 12\,\% + 40l \cdot 0\,\% + 30l \cdot 40\,\% = 100l \cdot x$$

Nach x aufgelöst ergibt sich (ab jetzt ohne Einheiten):

$$x = \frac{30 \cdot 12 + 30 \cdot 40}{100} = \frac{30 \cdot (12 + 40)}{100} = \frac{3 \cdot 52}{10} = \frac{156}{10} = 15{,}6\,\%$$

Durch Ausklammern und Kürzen wird die Rechnung wesentlich einfacher und schneller.

Aufgabe 6: Badewasser **Lösung D**

Wieder kannst Du die linke Seite der Gleichung aus dem Text abschreiben. Auf der rechten Seite musst Du darauf aufpassen, das korrekte Gesamtvolumen anzusetzen und die Klammersetzung beachten:

$$x \cdot 20 + 50 \cdot 45 = (50 + x) \cdot 35$$

Zunächst musst Du die Klammer entfernen, dann alle x auf eine Seite und alle Zahlen ohne x auf die andere Seite bringen:

$$20x + 50 \cdot 45 = 50 \cdot 35 + 35x$$

$$20x - 35x = 50 \cdot 35 - 50 \cdot 45$$

Jetzt ist es praktischer, auf der rechten Seite die 50 auszuklammern, statt die beiden Multiplikationen durchzuführen, die zu großen Zahlen führen würden. Gleichzeitig kannst Du die Gleichung schon mal minus eins nehmen, dadurch drehen sich alle Vorzeichen und beide Seiten werden positiv:

$$15x = 50 \cdot (45 - 35)$$

Damit ergibt sich für x:

$$x = \frac{500}{15} = \frac{100}{3} = 33{,}3\ l$$

Aufgabe 7: Smoothie **Lösung B**

Die Lösung funktioniert exakt analog zur Lösung von Aufgabe 6. Wieder musst Du beachten, dass Wasser einen Saftanteil von 0 % besitzt:

$$x \cdot 30 + 1{,}5 \cdot 0 + 4 \cdot 80 = (5{,}5 + x) \cdot 50$$

$$30x + 320 = 275 + 50x$$

$$20x = 45$$

$$x = \frac{45}{20} = 2{,}25\ \text{l}$$

Aufgabe 8: Schuhgröße **Lösung A**

Eigentlich liegen hier das erste Mal zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten vor, da die Männer und Frauen addiert 154 ergeben:

$$x + y = 154$$

Wenn man x als Anzahl der weiblichen Personen definiert und y als Anzahl der männlichen Personen, ergibt sich zunächst die Mischungsgleichung:

$$x \cdot 36 + y \cdot 43 = 154 \cdot 40$$

Nun kannst Du y durch x – 154 ersetzen und erhältst eine Gleichung mit einer Unbekannten:

$$x \cdot 36 + (154 - x) \cdot 43 = 154 \cdot 40$$

Nun musst Du die Klammer auflösen und dann nach x umstellen. Einfacher und schneller geht es auch hier, wenn Du die großen Multiplikationen nicht ausführst und in späteren Schritten ausklammerst:

$$36x - 43x = 154 \cdot 40 - 154 \cdot 43$$

$$-7x = 154 \cdot (40 - 43)$$

$$7x = 154 \cdot 3$$

$$x = \frac{154 \cdot 3}{7} = 22 \cdot 3 = 66$$

Du kannst Aufgaben dieser Art auch dadurch lösen, dass Du anschaust, in welchem Verhältnis der Mittelwert den Abstand der beiden Einzelwerte teilt. In diesem Fall liegen die Einzelwerte bei 36 und 43, haben also einen Abstand von 7. Der Mittelwert 40 teilt diese Strecke im Verhältnis 3 zu 4. In diesem Verhältnis müssen dann auch weibliche und männliche Personen in der Gruppe stehen. Da der Gesamtmittelwert näher an dem der Männer liegt, müssen mehr Männer in der Gruppe sein. Die Frauen machen demnach 3/7 der Gruppe aus und Du kommst direkt beim letzten Rechenschritt an.

5.3 Prozentrechnung

Aufgabe 9: Plasma **Lösung C**

Zunächst kann man die Plasmamenge in Litern berechnen:

$$4 \cdot 0{,}7 = 2{,}8\ \text{l}$$

Um nun die Proteinmasse zu berechnen, muss man mit 80 g/l multiplizieren:

$$2{,}8\ \text{l} \cdot 80\,\frac{\text{g}}{\text{l}} = 224\ \text{g}$$

Schneller geht es, wenn man direkt beide Multiplikationen auf einmal ausführt.

Aufgabe 10: Blattoberfläche **Lösung E**

Hier gilt: Vorsicht vor dem Basiswechsel! 20 % Zuwachs und 10 % Zuwachs hintereinander ergeben nicht 30 %. Am einfachsten siehst Du dies am Fantasiewert 100 m² für die Blattoberfläche. Wenn dieser zunächst um 20 % wächst, ergeben sich 120 m². Die weiteren 10 % beziehen sich nun auf die 120, entsprechen also 12 m², die dazukommen. Insgesamt sind es dann also 132 m² und ein Zuwachs von 32 %. Im Folgenden noch einmal in Formelschreibweise:

$$100 + \frac{100}{5} = 120$$

$$120 + \frac{120}{10} = 132$$

Aufgabe 11: Binsen **Lösung D**

Die Anzahl der Binsen wird mit x bezeichnet. Zunächst musst Du berechnen, wie viele Binsen Du brauchst, um 4,8 kg halten zu können:

$$x \cdot 0{,}3 = 4{,}8$$

Aufgelöst nach x ergibt sich:

$$x = \frac{4{,}8}{0{,}3} = \frac{48}{3} = 16$$

Es werden also 16 Halme benötigt. Um nun die Prozentzahl zu erhalten, muss dieser Wert durch 200 geteilt werden:

$$\frac{16}{200} = \frac{8}{100} = 8\ \%$$

Aufgabe 12: Brotbestellung **Lösung E**

Es gibt (wie so oft) mehrere Wege, diese Aufgabe zu lösen. Im Folgenden wird sehr nah am Text geblieben und demnach zuerst berechnet, wie viel Getreide von jeder Sorte verbraucht wird. Da nur nach der Gesamtmasse gefragt wird, kann man eine Rechnung für alle drei Getreidesorten durchführen:

$$150 \cdot 0{,}6 + 150 \cdot 0{,}44 + 150 \cdot 0{,}0667 = x$$

$$x = 90 + 66 + 10 = 166$$

Der letzte Schritt zur richtigen Lösung ist die Vermeidung der sprachlichen Falle. Es ist nach der Menge gefragt, die übrig bleibt, also muss man x noch von der Ausgangsmenge an Getreide abziehen:

$$450 - 166 = 284\ \text{kg}$$

Aufgabe 13: Bettenzahl **Lösung E**

Alle Aussagen sind korrekt. Wenn pro Jahr 10 Betten hinzukommen, vergrößert sich die Gesamtanzahl ständig. Dadurch ist 10 ein immer kleinerer Prozentsatz. Wenn andersrum der prozentuale Zuwachs konstant ist, steigt die Zahl der hinzugekommenen Betten. 10 % von 100 sind 110, 10 % von 110 schon 11 etc. Nach 9 Jahren mit jeweils 10 % Wachstum sind bei 100 Anfangsbetten schon 135 hinzugekommen:

$$100 \cdot 1{,}1^9 = 235{,}79$$

Also ist auch die dritte Aussage korrekt. An der letzten Formel kann man gut den Zusammenhang von Prozentrechnung und exponentiellem Wachstum erkennen. Den letzten Wert kann man ohne Taschenrechner in der gegebenen Zeit natürlich nicht genau berechnen, hier musst Du schätzen. Eine Möglichkeit ist es, schrittweise vorzugehen: Nach einem Jahr sind es 110, nach zwei Jahren 121, nach drei Jahren etwa 133, etc.

5.4 Einheitenrechnung

Aufgabe 14: Schatzsuche **Lösung B**

Die Formel ist in der Aufgabenstellung gegeben, zunächst setzt man alle Werte ein:

$$p = 1\frac{g}{cm^3} \cdot 10\frac{N}{kg} \cdot 18\ m$$

Jetzt musst Du die Einheiten anpassen, damit sie gekürzt und zusammengerechnet werden können. Dafür verwandelst Du am einfachsten die cm in m und die kg in g. Für die entsprechenden Präfixe schreibst Du die Zehnerpotenzen genau an die gleiche Stelle wie die Buchstaben, bei den cm^3 müssen Klammern gesetzt werden:

$$p = 1\frac{g}{\left(10^{-2} \cdot m\right)^3} \cdot 10\frac{N}{10^3 \cdot g} \cdot 18\ m$$

Jetzt kürzen sich die g und ein m. Übrig bleibt zunächst:

$$p = \frac{10 \cdot 18}{10^{-6} \cdot 10^3} \cdot \frac{N}{m^2}$$

Nach Verrechnung der Zehnerpotenzen ergibt sich:

$$p = 180 \cdot 10^3 \cdot \frac{N}{m^2}$$

Die Einheit ergibt Pa, das 10^3 entspricht dem Präfix k, also beträgt der Druck 180 kPa.

Aufgabe 15: Verlängerung **Lösung A**

Die Formel ist gegeben und F bereits isoliert, folglich braucht man nur noch einzusetzen:

$$F = 100\frac{N}{m} \cdot 12\ mm$$

$$F = 100\frac{N}{m} \cdot 12 \cdot 10^{-3}\ m = 1{,}2\ N$$

Aufgabe 16: Parallelschaltung **Lösung C**

Zunächst setzt man die Werte in die gegebene Formel ein:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\ \text{M}\Omega} + \frac{1}{500\ \text{k}\Omega}$$

Jetzt ersetzt man die Präfixe durch Zehnerpotenzen, die Grundeinheit kann man ab jetzt weglassen:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2 \cdot 10^6} + \frac{1}{500 \cdot 10^3}$$

Vorsicht: Dies ist keine reine Bruchgleichung, da rechts eine Summe zweier Brüche steht. Insofern kann man nicht einfach auf beiden Seiten Zähler und Nenner tauschen! Stattdessen braucht man einen geeigneten Hauptnenner. Eine Möglichkeit, diesen einfach zu finden und zu schreiben, lautet:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2000 \cdot 10^3} + \frac{1}{500 \cdot 10^3} = \frac{1}{2000 \cdot 10^3} + \frac{4}{2000 \cdot 10^3} = \frac{5}{2000 \cdot 10^3}$$

Damit ergibt sich R als Kehrbruch:

$$R = \frac{2000 \cdot 10^3}{5} = 400 \cdot 10^3 = 400\ \text{k}\Omega$$

Aufgabe 17: Seltsamer Quader **Lösung D**

Alle Zahlenwerte sind verschieden! Da die Umrechnung der Einheiten nur Unterschiede in der Zehnerpotenz ausmacht, kann man alle Einheiten und Zehnerpotenzen weglassen und sich die einfachsten Zahlen für die Rechnung aussuchen:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$c = \frac{V}{a \cdot b} = \frac{24}{2 \cdot 3} = 4$$

Als richtige Antwort kommt also nur D in Frage.

5.5 Aufgaben mit gegebener Formel

Aufgabe 18: Dünne Linse **Lösung E**

Da alle gegebenen Einheiten gleich sind, kannst Du sie weglassen. Nach dem Einsetzen erhältst Du:

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{36}=\frac{1}{f}$$

$$\frac{3}{36}+\frac{1}{36}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}=\frac{1}{f}$$

Damit ergibt sich f aus dem Kehrwert zu 9 cm.

Aufgabe 19: Herzleistung **Lösung E**

Alle Zahlenwerte sind verschieden! Da die Umrechnung der Einheiten nur Unterschiede in der Zehnerpotenz ausmacht, kann man alle Einheiten und Zehnerpotenzen weglassen und sich die einfachen Zahlen für die Rechnung aussuchen, indem man die gegebenen Werte durch 10 oder mal 10 rechnet:

$$P=\frac{15\cdot 75}{25}=45$$

Also kommt nur Lösung E in Frage.

Aufgabe 20: Leistung **Lösung D**

Hier sind Gleichungen als Text gegeben, als erstes solltest Du sie in mathematischer Form hinschreiben:

$$P=U\cdot I \qquad\qquad U=R\cdot I$$

Da das I in den Antwortmöglichkeiten nicht vorkommt, musst Du es in der zweiten Gleichung isolieren und das Ergebnis für I in der ersten Gleichung einsetzen:

$$I=\frac{U}{R} \qquad\qquad P=U\cdot\frac{U}{R}=\frac{U^2}{R}$$

Aufgabe 21: Kugel **Lösung A**

Gegeben ist:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Wie fast immer solltest Du zuerst nach der gesuchten Größe (hier also r als halber Durchmesser) auflösen, **bevor** Du die gegebenen Zahlenwerte einsetzt:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad |\cdot\frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4}V = \pi r^3 \qquad |:\ \pi$$

$$\frac{3V}{4\pi} = r^3 \qquad |\sqrt[3]{\ }$$

Damit ergibt sich:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

Jetzt setzt Du die gegebenen Zahlenwerte ein (inklusive der Näherung, dass **Pi** gleich **3** sein soll) und erhältst einen Ausdruck, den Du ohne Probleme kürzen und berechnen kannst:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 32\ dm^3}{4\cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{32\ dm^3}{4}} = \sqrt[3]{8\ dm^3} = 2\ dm$$

2 dm entsprechen 20 cm, was nicht die Lösung ist! Die Durchmesser/Radius-Falle kommt fast in jedem TMS/EMS vor. Hier ist der Durchmesser gesucht, also der doppelte Radius, insofern ist die richtige Antwort 40 cm. Durch das späte Einsetzen haben sich die beiden Dreien direkt gekürzt und vor allem wurde klar, dass es praktisch ist, die Einheit dm erst nach dem Wurzelziehen aufzulösen, da man dadurch kleine Zahlen erhält.

Aufgabe 22: Atombombe **Lösung C**

Zunächst bestimmt man die Energie, die bei der Umwandlung des Tennisballs frei wird:

$$E = 59\ g\cdot\left(3\cdot 10^8\ \frac{m}{s}\right)^2$$

Für die Einheit J braucht man statt g die Einheit kg, diese kann man durch Hinzufügen von 10^{-3} erzeugen. Gleichzeitig löst man die Klammer auf:

$$E = 59 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Die Einheiten in der Rechnung ergeben jetzt J. Als nächstes sollte man die Zehnerpotenzen zusammenrechnen.

$$E = 59 \cdot 9 \cdot 10^{13}\ \text{J}$$

Diese Multiplikation sollte besser nicht ausgeführt werden, da sie nur Zeit kostet. Die Frage nach dem Wievielfachen ist nämlich die Frage nach dem Verhältnis beider Energien, in dem sich dann noch einiges hinauskürzt:

$$\frac{E_T}{E_A} = \frac{59 \cdot 9 \cdot 10^{13}\ \text{J}}{90 \cdot 10^{12}\ \text{J}} = \frac{59 \cdot 10^{13}}{10 \cdot 10^{12}} = 59$$

Auch in dieser Aufgabe musste man also die schriftliche Multiplikation nicht anwenden.

5.6 Geschwindigkeit

Aufgabe 23: Züge **Lösung A**

In dieser Aufgabe muss man dreimal die Formel s = v · t anwenden. Aufpassen musst Du auf die Zeiteinheiten. Sie sind in teilweise in Minuten angegeben. Um sie mit den km/h verrechnen zu können, musst Du diese in h umrechnen:

$$s_1 = 160\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0{,}25\ \text{h} = 40\ \text{km}$$

$$s_2 = 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{6}\ \text{h} = 20\ \text{km}$$

$$s_1 = 180\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{12}\ \text{h} = 15\ \text{km}$$

Für die Gesamtstrecke folgt somit:

$$s_G = 40 + 20 + 15 = 75\ \text{km}$$

Aufgabe 24: Sonne – Erde **Lösung D**

Auch in dieser Aufgabe benötigt man nur die einfache Form der Geschwindigkeitsformel, muss sie allerdings nach t umstellen:

$$s = v \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{v}$$

Das Problem an dieser Aufgabe sind eher die Zahlen und Einheiten. Eingesetzt ergibt sich:

$$t = \frac{1{,}5 \cdot 10^8 \text{ km}}{1{,}08 \cdot 10^9 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{1{,}5}{10{,}8} \text{ h}$$

Der Zahlenwert ist kleiner als 1, damit kann man Antwortmöglichkeit E ausschließen. Aufgaben, bei denen die Antwortmöglichkeiten verschiedene Einheiten derselben physikalischen Größe haben (hier die Zeit), kann man oft gut lösen, indem man eine Einheit nach der anderen durchgeht. Hier sind jetzt die Stunden abgearbeitet, als nächstes verwandelt man die Einheit in Minuten. Wenn das richtige Ergebnis dann immer noch nicht dabei ist, bleibt nur A übrig.

$$\frac{1{,}5}{10{,}8} \text{ h} = \frac{1{,}5}{10{,}8} \cdot 60 \text{ min} = \frac{90}{10{,}8} \text{ min}$$

Eine solche Rechnung ist unangenehm. Da die Antwortmöglichkeiten weit auseinander liegen, darf man (wie fast immer im TMS/EMS) leicht runden:

$$\frac{90}{10{,}8} \text{ min} \approx \frac{88}{11} \text{min} = 8 \text{ min}$$

Also ist Antwort D korrekt. Wer im Kopf hat, dass das Licht von der Sonne zur Erde ca. 8 Minuten braucht, muss diese Aufgabe übrigens nicht rechnen, sondern kann direkt ankreuzen. Im TMS/EMS werden keine wissenschaftlich falschen Aufgaben gestellt. Daher ist es immer von Vorteil, ein breites naturwissenschaftliches Wissen zu haben.

Aufgabe 25: Verabredung **Lösung B**

Das Standardverfahren bei Aufgaben, in denen es um die Bestimmung eines Treffpunktes geht, ist das Aufstellen und Gleichsetzen der Bewegungsgleichungen. Dadurch, dass Martha und Jana aufeinander zulaufen, muss eine Geschwindigkeit negativ gesetzt werden:

$$s_M = 12 \cdot t \qquad s_J = -16 \cdot t + 14$$

$$12t = -16t + 14$$

$$t = \frac{14}{28} = 0{,}5h$$

Martha und Jana treffen sich also um 15.30.

Aufgabe 26: Pflanzenwachstum **Lösung C**

In dieser Aufgabe bewegen sich die Objekte in die gleiche Richtung, es müssen in den Bewegungsgleichungen also beide Geschwindigkeiten positiv gesetzt werden:

$$s_G = 4 \cdot t + 10 \qquad s_T = 5 \cdot t$$

Jetzt werden die Bewegungsgleichungen gleichgesetzt und nach t aufgelöst:

$$4t + 10 = 5t$$

Nach Subtraktion von 4 t ergibt sich, dass die Pflanzen nach zehn Wochen gleich hoch sind.

5.7 Verhältnisrechnung

Aufgabe 27: Zylinder I **Lösung D**

Die kurze Lösung zu dieser (und zu praktisch jeder anderen Verhältnisaufgabe) lautet: In der Volumenformel des Zylinders kommt r quadratisch vor. Wenn der Radius mal 2 genommen wird, muss das Volumen mal $2^2 = 4$ genommen werden. Dies liegt daran, dass sich alle anderen Größen herauskürzen, wenn man das Verhältnis bildet:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\pi \cdot r_2^2 \cdot h}{\pi \cdot r_1^2 \cdot h} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{(2 \cdot r_1)^2}{r_1^2} = \frac{4 \cdot r_1^2}{r_1^2} = 4$$

Umgeformt bedeutet dies:

$$V_2 = 4 \cdot V_1$$

Die Fragestellung mit „auf" bedeutet, dass man den Faktor angeben muss und nicht den Unterschied (der hier drei wäre), deswegen ist D die richtige Antwort.

Aufgabe 28: Kugel **Lösung A**

Bei dieser Aufgabe muss man die Verhältnisse in die andere Richtung betrachten: Wie muss man den Radius in der Volumenformel der Kugel verändern, damit sich das Volumen verdoppelt? Es gilt:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Der Radius steht in der dritten Potenz in der Formel. Welche Zahl muss man also hoch 3 nehmen, damit eine 2 herauskommt? Antwort: die dritte Wurzel aus 2. Mathematisch ausgedrückt:

$$2 = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_2^3}{\frac{4}{3}\pi r_1^3} = \frac{r_2^3}{r_1^3}$$

Jetzt löst man die Gleichung nach r_2 auf:

$$2 = \frac{r_2^3}{r_1^3}$$

$$2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$$

$$\sqrt[3]{2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Damit ergibt sich für r_2:

$$r_2 = \sqrt[3]{2} \cdot r_1$$

Hier musst Du eigentlich die dritte Wurzel aus 2 berechnen. Das ist ohne Taschenrechner nicht ganz einfach. Einfacher ist es, wenn man sich die Antworten anschaut. Es geht um die Veränderung, daher entsprechen 26 % einem Faktor von 1,26, 41 % einem Faktor von 1,41 usw. Schon

$$1{,}37 \cdot 1{,}37 \cdot 1{,}37$$

ist größer als 2, deswegen kann die Antwort nur A sein.

Aufgabe 29: Zentrifuge **Lösung C**

Die Frequenz steht quadratisch in der gegebenen Formel, insofern wächst die Frequenz auf das 3^2 gleich Neunfache, also um das Achtfache.

Aufgabe 30: Kreisfläche **Lösung B**

Die Formulierung „um den Faktor 16“ ist grenzwertig. Eigentlich deutet das „um“ auf die Änderung hin, also eine Addition. Das Wort Faktor überwiegt hier aber, da es nicht anders interpretiert werden kann, als dass die Fläche hinterher sechzehnmal so groß ist. Der Radius ist quadratisch in der Formel gegeben, insofern muss sich der Radius um den Faktor Wurzel aus 16, also 4, ändern. Das „um“ in der Fragestellung ist ein typischer Hinweis auf die „Um-Auf-Falle“. Der Radius verändert sich um 300 % auf 400 %, folglich ist B die richtige Antwort.

Aufgabe 31: Laminare Strömung **Lösung B**

Im TMS/EMS wäre wahrscheinlich die benötigte Formel für die Kreisfläche gegeben. Diese Aufgabe wird hier im Gegensatz zu den beiden vorigen wieder rein mathematisch gelöst, es ist aber auch möglich, durch Überlegung direkt zum letzten mathematischen Schritt zu kommen. Bei laminaren Strömungen gilt:

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

Nun werden die Querschnittsflächen eingesetzt, da es um eine Änderung des Radius und nicht um eine Änderung der Fläche geht:

$$\frac{\pi \cdot r_1^2}{\pi \cdot r_2^2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{2 \cdot v_1}{v_1} = 2 \Rightarrow r_1^2 = 2 \cdot r_2^2 \Leftrightarrow r_2^2 = \frac{1}{2} \cdot r_1^2$$

Daraus folgt:

$$r_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \cdot r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r_1 \approx 0{,}71 \cdot r_1$$

Wenn die Strömungsgeschwindigkeit doppelt so groß werden soll, dann muss der Radius um ca. 29 % des Ursprungswertes verringert werden.

5.8 Wachstum und Logarithmus

Aufgabe 32: Tarifmodelle **Lösung C**

Die jeweiligen Kosten für das Carsharing steigen linear nach den Formeln:

$$B_A(t) = 30 + 3{,}5t \qquad B_B(t) = 25 + 4{,}5t$$

Um zu berechnen, ab wann der eine Tarif günstiger als der andere ist, muss man den Schnittpunkt der Kosten bestimmen. Dafür setzt man die Wachstumsgleichungen gleich:

$$30 + 3{,}5t = 25 + 4{,}5t$$

Aufgelöst nach t ergibt sich:

$$t = 5$$

Der Schnittpunkt liegt also bei fünf Stunden im Monat, hier sind die beiden Anbieter gleich teuer. Billiger ist der Tarif mit dem höheren Basispreis also erst ab sechs Stunden Fahrzeit pro Monat.

Aufgabe 33: Bakterienwachstum **Lösung D**

Mit entsprechendem Verständnis musst Du bei dieser Aufgabe nicht rechnen (es wäre auch ziemlich unangenehm). Die Zeit, in der sich bei prozentualem Wachstum etwas vervielfacht, ist unabhängig vom Anfangswert. Insofern kann nur die Antwort in Frage kommen, bei der die angegebenen Zeiten gleich sind. In beiden Fällen hat sich der Anfangsbestand in 9 Tagen verdoppelt.

Aufgabe 34: Ansparung **Lösung C**

Mit der exponentiellen Wachstumsformel ergibt sich:

$$2000 = 1000 \cdot 1{,}048^{t}$$

$$2 = 1{,}048^{t}$$

Da nur Werte des Zehnerlogarithmus gegeben sind, muss man jetzt einen Basiswechsel über das Logarithmusgesetz ausführen (vermutlich ist dies mathematisch zu anspruchsvoll, als dass es im TMS/EMS drankommt, aber sicher ist sicher):

$$2 = 10^{\log(1{,}048)\cdot t}$$

$$2 = 10^{0{,}02\cdot t}$$

$$\log 2 = 0{,}02t$$

$$t = \frac{0{,}3}{0{,}02} = 15$$

Nach 15 Jahren hat sich das Kapital verdoppelt.

Aufgabe 35: Güterzug **Lösung C**

Einsetzen in die gegebene Formel ergibt:

$$20 = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \Leftrightarrow 2 = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Um den Logarithmus zu entfernen, musst Du beide Seiten in den Exponenten zur Basis 10 schreiben. Auf der linken Seite der Gleichung eliminieren sich dann die beiden Umkehroperationen:

$$10^{2} = \frac{I}{I_0} \Rightarrow I = 100 \cdot I_0$$

Der Güterzug war also um einen Faktor 100 lauter.

5.9 Stochastik und Statistik

Aufgabe 36: Reifeteilung **Lösung C**

Mit der kombinatorischen Produktregel ergibt sich, dass aus jedem Chromosomenpaar zwei verschiedene Chromosomen in die Keimzelle gelangen können. Insofern gibt es $2^3 = 8$ Möglichkeiten.

Aufgabe 37: Zecken **Lösung E**

Es liegt ein zweistufiges Zufallsexperiment vor.

Stufe 1 (Wieselschlag): Zecke ist infiziert, $P(W) = 0{,}1$
Zecke ist nicht infiziert, $Q(W) = 0{,}9$

Stufe 2 (Dachssteig): Zecke ist infiziert, $P(D) = 0{,}3$
Zecke ist nicht infiziert, $Q(D) = 0{,}7$

Die Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit gelingt schneller über das Gegenereignis, als wenn man alle drei Wahrscheinlichkeiten berechnet und addiert, die zu dem gesuchten Ereignis führen. Die Wahrscheinlichkeit, dass Hobelmüller von mindestens einer Zecke infiziert wurde, ist:

$P(\text{infiziert}) = 1 - P(\text{nicht infiziert}) = 1 - (0{,}9 \cdot 0{,}7) = 1 - 0{,}63 = 0{,}37$

Aufgabe 38: Klassensprecher **Lösung C**

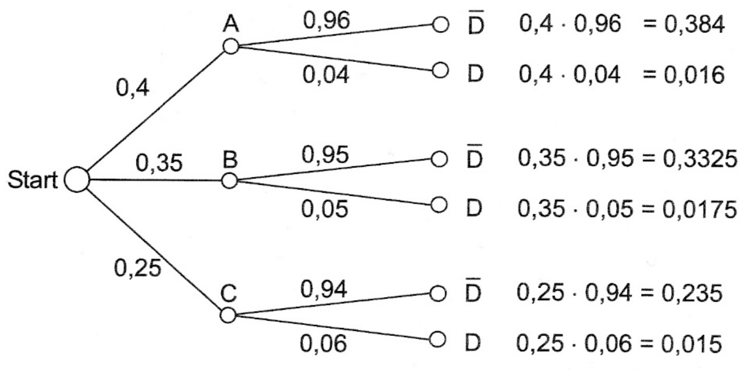
Mit der kombinatorischen Produktregel ergibt sich:

$$N = 7 \cdot 6 = 42$$

Die Zahl 42 spielt eine Rolle in einem berühmten Science-Fiction-Roman (Per Anhalter durch die Galaxis von Douglas Adams). Viele Naturwissenschaftler mögen dieses Buch sehr. Folglich ist in Tests die Antwortmöglichkeit 42 häufiger richtig als andere Zahlen. Aber natürlich kannst Du Dich darauf nicht verlassen.

Aufgabe 39: Infusionsnadeln **Lösung B**

Die Lösung ergibt sich aus dem folgenden Baumdiagramm:



Mit Hilfe der beiden Pfadregeln folgt:

$$p(D) = 0{,}016 + 0{,}0175 + 0{,}015 = 0{,}0485 = 4{,}85\ \%$$

Aufgabe 40: Tropenkrankheiten **Lösung B**

Man muss zwei Extremfälle betrachten: 1. Alle Personen, die Krankheit A haben, haben auch Krankheit B. Dann hätten 75 % der Bevölkerung beide Krankheiten. 2. Die 20 %, die nicht von Krankheit A betroffen sind, haben Krankheit B. Dann haben 55 % der Bevölkerung beide Krankheiten. Es haben also mindestens 55 % und höchstens 75 % beide Krankheiten.